

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ
областной олимпиады обучающихся учреждений
профессионального образования Кемеровской
области по дисциплине
МАТЕМАТИКА

ВАРИАНТ 1

Задание 1

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(3x - 8) < -2$.

Решение: ОДЗ: $3x - 8 > 0$, $x > 2\frac{2}{3}$

Приведем к общему основанию

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x - 8) < -2 * \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}$$

По свойствам логарифмов

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x - 8) < \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$
$$\log_{\frac{1}{4}}(3x - 8) < \log_{\frac{1}{4}}16$$

Так как основание логарифмического неравенства меньше 1, то получаем $x > 8$.

Ответ: $x \in (8; \infty)$

Задание 2

В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает половину высоты. Объем жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

Решение:

Формула объема конуса: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Известно, что уровень жидкости достигает половину высоты, учитывая свойства подобия, для заполненного конуса, будет применима формула объема: $V_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \frac{H}{2} = \frac{\pi R^2 H}{24} = 70$ мл. Подставляя, полученный результат в формулу объема найдем, что объем полного сосуда равен: $V = 560$ мл. Вычитая объем заполненной части, получаем ответ.

Ответ: 490 мл.

Задание 3

Найдите значение выражения: $\frac{12}{\sin^2 37^\circ + \sin^2 127^\circ}$.

Решение: Преобразуем выражение, используя формулы приведения, получим:

$$\frac{12}{\sin^2 37^\circ + \sin^2 127^\circ} = \frac{12}{\sin^2 37^\circ + \cos^2 37^\circ} = 12.$$

Ответ: 12.

Задание 4

Строительной фирме нужно приобрести 60 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (руб. за 1 М ³)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	4000	10400	
Б	4600	8400	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	4100	8400	При заказе на сумму больше 200000 руб. доставка бесплатно

Решение:

Стоимость всей покупки складывается из стоимости бруса и стоимости доставки. Вычислим затраты по каждому поставщику:

Поставщик А

$$4200 \cdot 40 + 10200 = 168000 + 10200 = 178200 \text{ рублей.}$$

Поставщик Б

Вычислим стоимость бруса: $4800 \cdot 40 = 192000$ рублей. Получили, что стоимость заказа выше 150000 рублей, поэтому доставка будет бесплатной.

Поставщик В

Вычислим стоимость бруса: $4300 \cdot 40 = 172000$ рублей. Получили, что стоимость заказа меньше 200000 рублей, поэтому доставка будет платной.

Стоимость всего заказа

$$172000 + 8200 = 180200 \text{ рублей}$$

Таким образом, наименьшая стоимость покупки с доставкой 178200 рублей.

Ответ: 178200

Задание 5

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 30 пассажиров, равна 0,93. Вероятность того, что окажется меньше 21 пассажиров, равна 0,5. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 21 до 29.

Решение:

Обозначим следующие события:

А — «в автобусе меньше 21 пассажиров», его вероятность равна 0,5.

В — «в автобусе от 21 до 29 пассажиров», вероятность, которую необходимо найти.

Теперь найдём сумму вероятностей А и В. Их сумма — это событие:

А + В — «в автобусе меньше 30 пассажиров».

Действительно, события А и В независимые (несовместные), то есть, они не могут произойти одновременно.

Вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Тогда, используя данные, получаем:

$$0,93 = 0,5 + P(B)$$

Таким образом, $P(B) = 0,93 - 0,5 = 0,43$

Ответ: 0,43

Задание 6

Найдите $f(3)$, если известно, что для любого x имеет место равенство $f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) = \frac{x+3}{x-1}$.

Решение:

Обозначим $t = \frac{x+1}{2x-1}$, выразим из приведенного равенства x через t : $x = \frac{t+1}{1-3t}$, тогда

$$f(t) = \frac{3-5t}{4t}$$

Ответ: $f(3) = -19$.

Задание 7

Решить уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.

Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

Из неё следует, что $\sin^4 x = \frac{1}{4}(\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1)$.

Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2}\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{2} + 3\cos 2x + 1 = 0;$$

$$\cos^2 2x + 4\cos 2x + 3 = 0.$$

Сделаем замену $t = \cos 2x$. Получим

$$t^2 + 4t + 3 = 0;$$

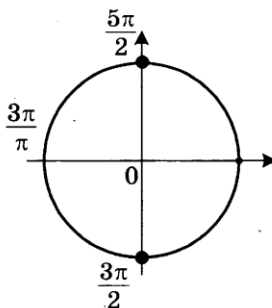
$$t = -1 \text{ или } t = -3;$$

$$\cos 2x = -1 \text{ или } \cos 2x = -3.$$

Уравнение $\cos 2x = -3$ не имеет решений. Из уравнения $\cos 2x = -1$ получаем

$$2x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

Задание 8

1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

Решение:

Заметим, что за 4 месяца Александр Сергеевич выплатит 1,1 млн рублей. Таким образом, он не покроем долг с процентами.

Каждый месяц долг увеличивается не более, чем на $1\,100\,000 \cdot 0,01 = 11\,000$ рублей.

Значит, за пять месяцев Александр Сергеевич должен будет выплатить не более $1\,100\,000 + 5 \cdot 11\,000 = 1\,155\,000$ рублей, что менее чем $5 \cdot 275\,000 = 1\,375\,000$ рублей.

Таким образом, Александр Сергеевич сможет выплатить кредит за 5 месяцев.

Ответ: 5.

ВАРИАНТ 2

Задание 1

Решите неравенство $\log_2(12 - 4x) < 4$.

Решение: ОДЗ: $12 - 4x > 0$, $4x < 12$, $x < 3$

Приведем к общему основанию

$$\log_2(12 - 4x) < 4 * \log_2 2$$

По свойствам логарифмов

$$\log_2(12 - 4x) < \log_2 2^4$$

$$\log_2(12 - 4x) < \log_2 16$$

Так как основание логарифмического неравенства больше 1, то получаем $x < -1$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1)$

Задание 2

В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду погрузили деталь. При этом уровень жидкости поднялся на 9 см. Чему равен объем детали?

Решение: Объем цилиндра равен $V = \pi R^2 H = 12\pi R^2$, тогда $\pi R^2 = \frac{2000}{12}$. Объем детали равен

$$V = \frac{2000 \cdot 9}{12} = 1500.$$

Ответ: 1500 см^3

Задание 3

Найдите значение выражения: $\frac{35}{\cos^2 84^\circ + \cos^2 174^\circ}$.

Решение: Преобразуем выражение, используя формулы приведения, получим:

$$\frac{35}{\cos^2 84^\circ + \cos^2 174^\circ} = \frac{35}{\cos^2 84^\circ + \sin^2 84^\circ} = 35.$$

Ответ: 35.

Задание 4

Строительной фирме нужно приобрести 75 кубометров пенобетона у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м ³)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2650	4500 руб.	
Б	2700	5500 руб.	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	2680	3500 руб.	При заказе более 80 м ³ доставка бесплатно

Решение

При покупке у поставщика А цена заказа складывается из стоимости самого пенобетона и стоимости доставки:

$$2650 \cdot 75 + 4500 = 198\,450 + 4500 = 203\,250 \text{ рублей.}$$

При покупке у поставщика Б цена заказа складывается из стоимости самого пенобетона и стоимости доставки, стоимость пенобетона составляет:

$$2700 \cdot 75 = 202\,500 \text{ рублей.}$$

Сумма больше 150 000, поэтому доставка будет бесплатной.

При покупке у поставщика В цена заказа складывается из стоимости самого пенобетона и стоимости доставки. В данном случае доставка будет платной, так объем заказа менее 80 м³, значит:

$$2680 \cdot 75 + 3500 = 201\,000 + 3500 = 204\,500 \text{ рублей.}$$

За самую дешевую покупку с доставкой придется заплатить 202 500 рублей. **Ответ:** 202 500

Задание 5

Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 15 задач, равна 0,62. Вероятность того, что О. верно решит больше 14 задач, равна 0,7. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 15 задач.

Решение

Обозначим следующие события:

А – «учащийся решит 15 задач», эту вероятность необходимо найти.

В – «учащийся решит больше 15 задач», равна 0,62.

Теперь найдём сумму вероятностей А и В. Их сумма — это событие:

А + В – «учащийся решит больше 14 задач».

События А и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Таким образом, используя данные, получаем: $0,7 = P(A) + 0,62$

Значит, $P(A) = 0,7 - 0,62 = 0,08$

Ответ: 0,08

Задание 6

Найдите $f(2)$, если известно, что для любого x имеет место равенство $f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right) = \frac{x+2}{x-1}$.

Решение:

Обозначим $t = \frac{x-1}{3x+1}$, выразим из приведенного равенства x через t : $x = \frac{t+1}{1-3t}$, тогда

$$f(t) = \frac{3-5t}{4t}, \quad f(2) = \frac{3-10}{8} = -\frac{7}{8}.$$

Ответ: $f(2) = -\frac{7}{8}$

Задание 7

Решить уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.

Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}$.

Из неё следует, что $\sin^4 2x = \frac{1}{4}(\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1 + 3\cos 4x - 1 = 0;$$

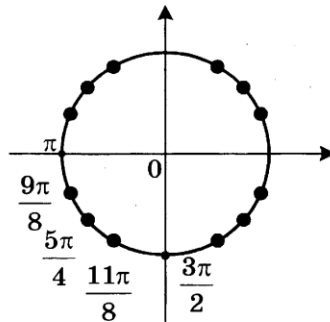
$$\cos^2 4x + \cos 4x = 0;$$

$$\cos 4x = -1 \quad \text{или} \quad \cos 4x = 0.$$

$$4x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим: $x = \frac{9\pi}{8}$; $x = \frac{5\pi}{4}$; $x = \frac{11\pi}{8}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{8}$.

Задание 8

31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1 + b)X.$$

По условию двумя выплатами Дмитрий должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - (1 + b)X = 0$, откуда $X = \frac{Sb^2}{b + 1}$.

При $S = 4\,290\,000$ и $a = 14,5$, получаем: $b = 1,145$ и

$$X = \frac{4\,290\,000 \cdot 1,311025}{2,145} = 2\,622\,050 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 2 622 050.